Devoirs de vacances pour les futurs élèves de 1S

I- Fonctions

On donne plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Forme 1 : $f(x) = 4(x-5)^2 - 9$
Forme 2 : $f(x) = (2x-13)(2x-7)$
Forme 3 : $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$

1. Retrouver les noms des différentes formes données.
2. Développer les formes 1 et 2 ; vérifier que l'on retrouve bien la forme 3.
3. Quelle est la nature de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère ?
4. Dans chaque situation, choisir la forme la plus adaptée et répondre à la question posée.
   (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Calculer $f(0)$.
   (c) Déterminer les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}_f$.
   (d) Calculer l'image de $\sqrt{2}$ par f.
   (e) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (f) Résoudre l'équation $f(x) = 91$.
5. On souhaite retrouver les variations de la fonction f en utilisant les définitions des fonctions croissantes et décroissantes. La forme 1 sera utilisée dans cette partie.
   (a) On considère deux nombres réels a et b supérieurs ou égaux à 5.
   Recopier et compléter les pointillés par des inégalités ou par les propriétés utilisées.
   Si $5 \leq a \leq b$
   alors $0......a-5......b-5$ car ....
   donc $(a-5)^2......(b-5)^2$ car ....
   d'où $4(a-5)^2......4(b-5)^2$ car ....
   ainsi, $4(a-5)^2-9......4(b-5)^2-9$ car ....
   (b) Retrouver le sens de variation de f sur $[5;+\infty[$.
   (c) Par un raisonnement analogue, démontrer que f est décroissante sur $]-\infty;5]$.

II- Probabilités

Partie 1 :

Pour préparer ses oeuvres en mosaïque, en prévision d'une "invasion" à Los Angeles, un artiste urbain dispose de 1500 carreaux dont 25% sont jaunes, les $\frac{2}{5}$ sont bleus et le reste est rouge.
Certains carreaux sont abîmés : ils représentent 4% des jaunes, 5% des bleus et 4% des rouges.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

Couleur / État	jaune	bleu	rouge	Total
abîmés				
non abîmés				
Total				1500

2. L'artiste prend un carreau au hasard, tous les carreaux ayant la même probabilité d'être choisis. On note :

   A : "le carreau choisi est rouge"

   B : "le carreau choisi est abîmé"

   C : "le carreau choisi est bleu"

   Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(\overline{C})$ sachant que $\overline{C}$ représente l'événement contraire de C.
3. Décrire par une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ puis calculer leurs probabilités.
4. Exprimer en fonction des événements A, B et C l'événement "le carreau choisi n'est ni abîmé ni rouge" puis calculer sa probabilité de deux façons différentes.
5. L'artiste choisit au hasard un carreau non abîmé. Quelle est la probabilité que ce carreau soit rouge ? *On donnera un résultat sous forme décimale arrondi à* 10^{-2} *près.*

Partie 2 :

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé non pipé à six faces portant les numéros $0-0-1-1-2-2$ puis à lancer une pièce équilibrée autant de fois qu'indiqué par le dé. On note alors le résultat comme un couple de la forme (nombre de "Pile" obtenus ; nombre de "Face" obtenus).
Par exemple, si le dé donne 1, je lance une fois la pièce et j'obtiens "Face". Le résultat est alors $(0;1)$.

Dessiner un arbre des possibles concernant cette expérience aléatoire en inscrivant les résultats au bout des feuilles.

III- Equations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes.

1. $2(x+3)-5>4-(3-7x)$
2. $\dfrac{x+1}{5}-2=\dfrac{x}{3}$
3. $(x+5)^2+2x+10=0$
4. $\dfrac{x+3}{(2x+5)(1-x)} \geq 0$

IV- Vecteurs et repérage

Partie 1 :

$ABCD$ est un parallélogramme.
Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{EF}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Les droites (EF) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifier.
5. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et F.
6. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BD}$ dans ce repère.
7. Retrouver d'une autre manière la réponse à la question 4.

Partie 2 :

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points suivants :

$$A(2;2) \qquad B(8;5) \qquad C(-6;-2)$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires ? Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AC).
4. Le point $D(50;26)$ appartient-il à la droite (AC) ? Justifier.

Partie 3 :

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points suivants :

$$M(0;6) \qquad N(2;-2) \qquad P(13;1)$$

Le triangle MNP est-il rectangle en N ? Justifier.

V- Algorithmique

Partie 1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(x) = x^3 - 27x^2 + 135x + 7$.
On admet que le maximum de la fonction f est atteint pour un entier N de l'intervalle $[0;10]$.
On donne l'algorithme suivant qui affiche le maximum M de f :

```
M prend la valeur 7
Pour I variant de 1 à 10 faire
    F prend la valeur I^3 − 27 × I^2 + 135 × I + 7
    Si F > M
        Alors M prend la valeur F
    Fin Si
Fin Pour
Afficher M
```

1. Combien cet algorithme comporte-t-il de variables ? Comment s'appellent-elles ?
2. Pourquoi la variable M est-elle initialisée à 7 ?
3. Faire fonctionner cet algorithme "à la main" en utilisant un tableau d'état des variables.
4. Quel est alors le maximum de f sur l'intervalle $[0;10]$?
5. Comment doit-on modifier cet algorithme pour qu'il affiche également l'entier N pour lequel f admet son maximum ?
6. Programmer éventuellement ce nouvel algorithme en utilisant Edupython pour retrouver la valeur de N pour laquelle le maximum de la fonction f trouvé à la question 4 est atteint.

Partie 2 :

Ecrire un algorithme en langage naturel puis éventuellement en Python qui, à partir d'un nombre entier N saisi,

1. calcule le produit de tous les nombres entiers de 1 à N.
2. calcule le produit de tous les nombres entiers impairs de 1 à N.
3. calcule le produit suivant : $1 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{4} \times ......$ jusqu'au N^{ieme} facteur.